

l.p.	Dla jakich wartości parametru równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma:	<u>Warunki:</u>
1.	tylko jeden pierwiastek	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$
2.	dwa pierwiastki rzeczywiste	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$
3.	dwa różne pierwiastki rzeczywiste	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$
4.	nie ma pierwiastków rzeczywistych	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$
5.	dwa pierwiastki różnych znaków	I sp. $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases}$ lub II sp. $a \cdot f(0) < 0$
6.	dwa pierwiastki tego samego znaku	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$
7.	dwa różne pierwiastki tego samego znaku	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$
8.	dwa (różne) pierwiastki dodatnie	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$
9.	dwa (różne) pierwiastki ujemne	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$
10.	dwa (różne) pierwiastki, których suma kwadratów jest najmniejsza (największa)	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ \text{badamy ekstremum } S = x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$

11.	dwa (różne) pierwiastki, których suma kwadratów jest : równa liczbie k, większa od k, mniejsza od k	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ x_1^2 + x_2^2 \begin{cases} = k \\ > k \\ < k \end{cases} \end{cases}$
12.	Dwa (różne) pierwiastki, których suma odwrotności jest: - dodatnia, ujemna - równa, większa, mniejsza od danej liczby (wyrażenia) k	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ = k \\ > k \\ < k \end{cases} \end{cases}$
13.	dwa pierwiastki różniące się o k	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 - x_2 = k \end{cases}$
14.	dwa (różne) pierwiastki, z których jeden jest sinusem, a drugi kosinusem tego samego kąta	$x_1 = \sin \alpha, x_2 = \cos \alpha \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$
15.	dwa (różne) pierwiastki, z których jeden jest sinusem, a drugi kosinusem tego samego kąta ostrego	$x_1 = \sin \alpha, x_2 = \cos \alpha, \alpha - \text{ostry} \Rightarrow x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$ $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$
16.	dwa (różne) pierwiastki większe od danej liczby p	$\begin{matrix} 1^\circ \\ 2^\circ \end{matrix} \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \end{cases}$ $\begin{matrix} 3^\circ \\ 4^\circ \end{matrix} \begin{cases} x_1 > p \\ x_2 > p \end{cases}$ $\begin{matrix} 3^\circ \\ 4^\circ \end{matrix} \begin{cases} x_1 - p > 0 \\ x_2 - p > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - p) \cdot (x_2 - p) > 0 \\ (x_1 - p) + (x_2 - p) > 0 \end{cases}$

		<u>lub II sposób:</u> $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 (\Delta > 0) \\ a \cdot f(p) > 0 \\ x_w > p \end{cases} \quad \text{gdzie } x_w = -\frac{b}{2a}$
17.	dwa (różne) pierwiastki mniejsze od danej liczby q	$\begin{aligned} 1^\circ & \begin{cases} a \neq 0 \end{cases} \\ 2^\circ & \begin{cases} \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \end{cases} \\ 3^\circ & \begin{cases} x_1 < q \end{cases} \\ 4^\circ & \begin{cases} x_2 < q \end{cases} \end{aligned}$ $\begin{aligned} 3^\circ & \begin{cases} x_1 - q < 0 \end{cases} \\ 4^\circ & \begin{cases} x_2 - q < 0 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - q) \cdot (x_2 - q) > 0 \\ (x_1 - q) + (x_2 - q) < 0 \end{cases}$ <u>lub II sposób</u> $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 (\Delta > 0) \\ a \cdot f(q) > 0 \\ x_w < q \end{cases}, \text{ gdzie } x_w = -\frac{b}{2a}$
18.	dwa (różne) pierwiastki większe od liczby p i mniejsze od liczby q tzn. $x_1, x_2 \in (p, q)$	Warunki z punktu 16. i 17. <u>lub II sposób</u> $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ a \cdot f(p) > 0 \\ a \cdot f(q) > 0 \\ p < x_w < q \end{cases}, \text{ gdzie } x_w = -\frac{b}{2a}$
19.	dwa pierwiastki, z których jeden jest większy, a drugi mniejszy od liczby r, tzn. $r \in (x_1, x_2)$	$\begin{aligned} 1^\circ & \begin{cases} a \neq 0 \end{cases} \\ 2^\circ & \begin{cases} \Delta > 0 \end{cases} \\ 3^\circ & \begin{cases} x_1 < r \end{cases} \\ 4^\circ & \begin{cases} x_2 > r \end{cases} \end{aligned}$ $\begin{aligned} 3^\circ & \begin{cases} x_1 - r < 0 \end{cases} \\ 4^\circ & \begin{cases} x_2 - r > 0 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow (x_1 - r)(x_2 - r) < 0$ <u>lub II sposób</u> $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a \cdot f(r) < 0 \end{cases}$

20.	dwa różne pierwiastki, z których jeden jest mniejszy od liczby p, a drugi większy od q, tzn. $p, q \in (x_1, x_2)$, gdzie $p < q$	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a \cdot f(p) < 0 \\ a \cdot f(q) < 0 \end{cases}$
21.	dwa różne pierwiastki, z których jeden jest kwadratem drugiego tzn. $x_1 = x_2^2$	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 = x_2^2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_2^2 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_2^2 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$

(*) Uwaga:

Jeżeli parametr występuje przy współczynniku a, to można zacząć rozwiązywać zadanie od rozpatrzenia przypadku $a = 0$ (równanie liniowe), a potem $a \neq 0$ (równanie kwadratowe).

$\Delta \geq 0$	<u>Wzory Viete'a:</u>	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
-----------------	-----------------------	--

Przykłady:

$$1) \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2,$$

$$2) \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2},$$

$$3) \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2}$$

$$4) \quad x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2],$$

$$5) \quad x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2]^2 - 2(x_1 \cdot x_2)^2,$$

$$6) \quad |x_1 - x_2| = k \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = k^2 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = k^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 = k^2$$

$$\text{Lub: } |x_1 - x_2| = \left| \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = k$$

$$7) \quad x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2 + 1)$$

$$8) \quad (|x_1| + |x_2|)^2 = x_1^2 + 2|x_1| \cdot |x_2| + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 + 2|x_1 \cdot x_2|$$