l.p.	*Dla jakich wartości parametru równanie* $ax^2+bx+c=0$ ***ma:***	***Warunki:***
1.	**tylko jeden pierwiastek**	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$
2.	**dwa pierwiastki rzeczywiste**	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$
3.	**dwa różne pierwiastki rzeczywiste**	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$
4.	**nie ma pierwiastków rzeczywistych**	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$
5.	**dwa pierwiastki różnych znaków**	I sp. $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases}$ lub II sp. $a \cdot f(0) < 0$
6.	**dwa pierwiastki tego samego znaku**	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$
7.	**dwa różne pierwiastki tego samego znaku**	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$
8.	**dwa (różne)pierwiastki dodatnie**	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$
9.	**dwa (różne) pierwiastki ujemne**	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$
10.	**dwa (różne) pierwiastki, których suma kwadratów jest najmniejsza (największa)**	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ badamy \quad ekstremum \quad S = x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$

11.	**dwa (różne) pierwiastki, których suma kwadratów jest :** **równa liczbie k,** **większa od k,** **mniejsza od k**	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ x_1^2 + x_2^2 \begin{cases} = k \\ > k \\ < k \end{cases} \end{cases}$
12.	**Dwa (różne) pierwiastki, których suma odwrotności jest:** **- dodatnia, ujemna** **- równa, większa, mniejsza od danej liczby (wyrażenia) k**	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ = k \\ > k \\ < k \end{cases} \end{cases}$
13.	**dwa pierwiastki, których wartość bezwzględna ich różnicy jest równa liczbie** $k \neq 0$	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \lvert x_1 - x_2 \rvert = k \end{cases}$
14.	**dwa (różne) pierwiastki, z których jeden jest sinusem, a drugi kosinusem tego samego kąta**	$x_1 = \sin\alpha,\ x_2 = \cos\alpha \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$
15.	**dwa (różne) pierwiastki, z których jeden jest sinusem, a drugi kosinusem tego samego kąta ostrego**	$x_1 = \sin\alpha,\ x_2 = \cos\alpha,\ \alpha - ostry \quad \Rightarrow x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$ $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$
16.	**dwa (różne) pierwiastki większe od danej liczby p**	$\begin{matrix} 1^\circ \\ 2^\circ \\ 3^\circ \\ 4^\circ \end{matrix} \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ x_1 > p \\ x_2 > p \end{cases}$ $\begin{matrix} 3^\circ \\ 4^\circ \end{matrix} \begin{cases} x_1 - p > 0 \\ x_2 - p > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - p) \cdot (x_2 - p) > 0 \\ (x_1 - p) + (x_2 - p) > 0 \end{cases}$

		lub II sposób: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0\ (\Delta > 0) \\ a \cdot f(p) > 0 \\ x_w > p \end{cases}$ gdzie $x_w = -\dfrac{b}{2a}$
17.	**dwa** **(różne)** **pierwiastki mniejsze od danej liczby q**	$\begin{matrix} 1^\circ \\ 2^\circ \\ 3^\circ \\ 4^\circ \end{matrix} \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ x_1 < q \\ x_2 < q \end{cases}$ $\begin{matrix} 3^\circ \\ 4^\circ \end{matrix} \begin{cases} x_1 - q < 0 \\ x_2 - q < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - q)\cdot(x_2 - q) > 0 \\ (x_1 - q) + (x_2 - q) < 0 \end{cases}$ lub II sposób $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0\ (\Delta > 0) \\ a \cdot f(q) > 0 \\ x_w < q \end{cases}$, gdzie $x_w = -\dfrac{b}{2a}$
18.	**dwa** **(różne)** **pierwiastki większe od liczby p i mniejsze od liczby q tzn.** $x_1, x_2 \in (p, q)$	Warunki z punktu 16. i 17. lub II sposób $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta > 0) \\ a \cdot f(p) > 0 \\ a \cdot f(q) > 0 \\ p < x_w < q \end{cases}$, gdzie $x_w = -\dfrac{b}{2a}$
19.	**dwa pierwiastki, z których jeden jest większy, a drugi mniejszy od liczby r, tzn.** $r \in (x_1, x_2)$	$\begin{matrix} 1^\circ \\ 2^\circ \\ 3^\circ \\ 4^\circ \end{matrix} \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 < r \\ x_2 > r \end{cases}$ $\begin{matrix} 3^\circ \\ 4^\circ \end{matrix} \begin{cases} x_1 - r < 0 \\ x_2 - r > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - r)(x_2 - r) < 0$ lub II sposób $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a \cdot f(r) < 0 \end{cases}$

20.	**dwa różne pierwiastki, z których jeden jest mniejszy od liczby p, a drugi większy od q, tzn.** $p, q \in (x_1, x_2)$, **gdzie** $p < q$	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a \cdot f(p) < 0 \\ a \cdot f(q) < 0 \end{cases}$
21.	**dwa różne pierwiastki, z których jeden jest kwadratem drugiego tzn.** $x_1 = x_2^2$	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 = x_2^2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_2^2 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_2^2 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$

(*) Uwaga:

Jeżeli parametr występuje przy współczynniku a, to można zacząć rozwiązywać zadanie od rozpatrzenia przypadku $a = 0$ (równanie liniowe), a potem $a \neq 0$ (równanie kwadratowe).

$\Delta \geq 0$ **<u>Wzory Viete'a:</u>**

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Przykłady:

1) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$,

2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$,

3) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2}$

4) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2]$,

5) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2]^2 - 2(x_1 \cdot x_2)^2$,

6) $|x_1 - x_2| = k \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = k^2 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = k^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 = k^2$

Lub: $|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = k$

7) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 = x_1 x_2 \cdot (x_1 + x_2) + x_1 x_2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2 + 1)$

8) $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) = [4(x_1 - x_2) - 1]\cdot[4(x_1 - x_2) + 1] = 16(x_1 - x_2)^2 - 1 =$
$= 16[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] - 1 = 16(x_1 + x_2)^2 - 64x_1x_2 - 1$

9) $(|x_1| + |x_2|)^2 = x_1{}^2 + 2|x_1|\cdot|x_2| + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 + 2|x_1 \cdot x_2|$

OPRACOWAŁA *Elżbieta Guziejko I Liceum Ogólnokształcące im. Jana Kochanowskiego w Olecku*